Matemática Discreta 1 Primer parcial	1$^{\text{er}}$ Apellido: ____________	2 de noviembre de 2017
Dpto. Matematica Aplicada TIC ETS Ingenieros Informáticos Universidad Politécnica de Madrid	2$^{\text{o}}$ Apellido: ____________ Nombre: ____________ Número de matrícula:	Tiempo 2 horas **Nota:**

Ejercicio 1 (8 puntos)

a) Sea un conjunto finito X de n elementos y $\mathcal{P}(X)$ el conjunto formado por todos los subconjuntos de X (partes de X). Obtén el cardinal de $D_{667} \times \mathcal{P}(X)$; es decir, obtén $|D_{667} \times \mathcal{P}(X)|$.

b) Sea $X = \{a, b, c\}$. En $\mathcal{P}(X)$ definimos la siguiente relación: dados $M, N \subset X$, decimos que MRN si $|M| \leq |N|$. Razona qué propiedades (reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva) cumple la relación y cuáles no.

Solución:

a) $|D_{667} \times \mathcal{P}(X)| = |D_{667}| \cdot 2^{|X|} = |D_{667}| \cdot 2^n$.

Para saber el cardinal de D_{667} necesitamos encontrar los divisores primos de 667, y para ello estudiamos si tiene algún divisor primo menor o igual que $\sqrt{667} \approx 25$. Dividimos 667 entre todos los primos menores o iguales que 25, que son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 y 23. Resultando $667 = 23 \cdot 29$, así $D_{667} = \{1, 23, 29, 667\}$ y $|D_{667} \times \mathcal{P}(X)| = 4 \cdot 2^n$.

b) Reflexiva: $|M| = |M| \Rightarrow MRM$, para cualquier $M \subset X$. Por tanto, R es reflexiva.

Simétrica: $\emptyset R\{a\}$ ya que $|\emptyset| = 0 \leq 1 = |\{a\}|$, pero $\{a\} \not R \emptyset$. Por tanto, R no simétrica.

Antisimétrica: $\{a\}R\{b\}$ y $\{b\}R\{a\}$ ya que $\{a\}$ y $\{b\}$ tienen el mismo cardinal, pero $\{a\} \neq \{b\}$. Por tanto, R no antisimétrica.

Transitiva: sean $M, N, S \subset X$, supongamos MRN y NRS, por tanto $|M| \leq |N|$ y $|N| \leq |S|$. Luego, $|M| \leq |S|$ y así MRS. Por tanto, R es transitiva.

Ejercicio 2 (12 puntos)

a) Sea D_{196} el conjunto de todos los divisores positivos de 196, y sea $|$ la relación de divisibilidad; es decir, $a|b$ significa que "a divide a b".

i. Dibuja el diagrama de Hasse del conjunto ordenado $(D_{196}, |)$.

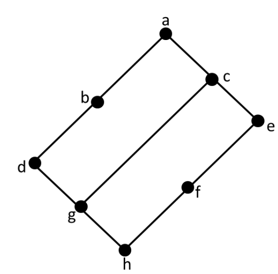
ii. Obtén las cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo, máximo y mínimo, maximales y minimales, si los hay, del subconjunto $B = \{14, 28, 98\}$.

iii. Razona si 28 y 4 tienen complementario en D_{196}. En caso afirmativo obténlos.

b) Sea L el retículo cuyo diagrama de Hasse está dado por la siguiente figura.

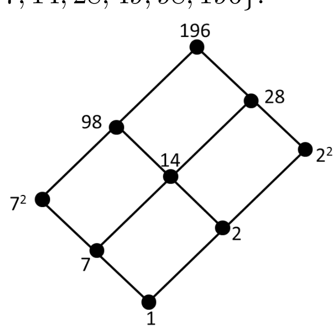
i. Razona si L es un retículo complementario.

ii. Razona si L es un retículo distributivo.



Solución:

a) i. $196 = 2^2 \cdot 7^2$, $\qquad D_{196} = \{1, 2, 4, 7, 14, 28, 49, 98, 196\}$.



ii. $B = \{14, 28, 98\}$

Cotas superiores: $\{196\}$ Cotas inferiores: $\{14, 7, 2, 1\}$

Supremo: $\{196\}$ Ínfimo: 14

Máximo: $\emptyset$ Minimo: 14

Maximales: $\{98, 28\}$ Minimales: $\{14\}$

iii. $\text{mcd}(2^2, 7^2) = 1$ y $\text{mcm}(2^2, 7^2) = 2^2 \cdot 7^2 = 196$. Por tanto, 7^2 es el complementario de 2^2.

Veamos si 28 tiene complementario. Buscamos un $x \in D_{196}$ tal que $\text{mcd}(x, 2^2 \cdot 7) = 1$ y $\text{mcm}(x, 2^2 \cdot 7) = 196$. Como $\text{mcd}(x, 2^2 \cdot 7) = 1$, el único $x \in D_{196}$ que lo cumple es $x = 1$, pero $\text{mcm}(1, 2^2 \cdot 7) = 2^2 \cdot 7 \neq 196$. Por tanto, 28 no tiene complementario en D_{196}.

b) i. L no es un retículo complementario. Para demostrarlo veamos que g no tiene complementario en L. Buscamos un $x \in L$ tal que $\text{ínf}(x, g) = h$ y $\sup(x, g) = a$. Como $\text{ínf}(x, g) = h$, tiene que ser $x = e$, $x = f$ o $x = h$, pero $\sup(e, g) = \sup(f, g) = c \neq a$ y $\sup(h, g) = g \neq a$. Por tanto, g no tiene complementario en L. Tampoco tiene complementario c.

ii. L no es retículo distributivo ya que, por ejemplo, d tiene dos complementarios, veámoslo: $\text{ínf}(d, e) = \text{ínf}(d, f) = h$ y $\sup(d, e) = \sup(d, f) = a$, luego e y f son complementarios de d en L. También tienen dos complementarios e, f y b.

Ejercicio 3 (8 puntos)

a) Obtén una expresión booleana en forma de "mínima suma de productos" para la función booleana cuyo conjunto de verdad es $S(f) = \{1101, 1110, 1010, 1011, 1001, 0011, 0001, 0110, 0010\}$. Resuelve utilizando uno de los dos métodos estudiados: Quine McCluskey o mapa de Karnaugh.

b) Completa la tabla de la figura, de forma que la expresión booleana, en forma de suma de productos, que representa el contenido de la tabla, sea la más simple posible. Escribe a continuación dicha expresión.

x	y	z	f(x,y,z)
1	1	1	1
1	1	0	
1	0	1	0
1	0	0	
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	
0	0	0	1

Solución:

a) $\boxed{zt' + y't + xz't}$

	1110	1010	1101	1011	1001	0011	0001	0110	0010
--10	√	√						√	√
-01-		√		√		√			√
-0-1				√	√	√	√		
1-01			√		√				

b) $\boxed{z' + xy}$

	y	y	y'	y'
x		1	0	
x'	1	0		1
	z'	z	z	z'

Ejercicio 4 (4 puntos)

Demuestra por inducción que para todo $n \geq 1$ se cumple la igualdad

$$\sum_{i=1}^{n} (4i - 3) = n(2n - 1).$$

Solución:

1) Comprobamos la condición inicial: para $n = 1$ tenemos $4 - 3 = 1$ y $1(2 - 1) = 1$ que son iguales.

2) Hipótesis de Inducción: suponemos el resultado cierto para $n = k$, es decir, $\sum_{i=1}^{k}(4i - 3) = k(2k - 1)$.

3) Comprobemos que el resultado es cierto para $n = k + 1$ (utilizando la hipótesis de inducción)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1}(4i-3) &= \sum_{i=1}^{k}(4i-3) + (4(k+1)-3)\\ &= k(2k-1) + 4k + 1 = 2k^2 + 3k + 1 = (k+1)(2k+1) = (k+1)(2(k+1)-1)\end{aligned}$$

Luego aplicando el teorema de Inducción el resultado es cierto para todo $n \geq 1$.

Ejercicio 5 (8 puntos)

Considera la ecuación diofántica $194x + 70y = 500$.

a) Razona si tiene solución y en caso afirmativo, utilizando el Algoritmo de Euclides, escribe todas las soluciones enteras.

b) Razona si hay soluciones positivas.

Solución:
a) En primer lugar, usamos el algoritmo de Euclides para calcular que $\mathrm{mcd}(194, 70) = 2$. En efecto,

$$\begin{aligned}194 &= 2 \times 70 + 54,\\ 70 &= 1 \times 54 + 16,\\ 54 &= 3 \times 16 + 6,\\ 16 &= 2 \times 6 + 4,\\ 6 &= 1 \times 4 + 2,\\ 4 &= 2 \times 2.\end{aligned}$$

Como $\mathrm{mcd}(194, 70) = 2$ divide al término independiente, tenemos que la ecuación diofántica $194x + 70y = 500$ tiene soluciones enteras.

A continuación usaremos el Teorema de Bezout para encontrar una solución particular de la ecuación. Es decir, buscamos $p, q \in \mathbb{Z}$ tales que $180 \times p + 70 \times q = 2$. Para ello despejaremos los restos en el algoritmo de Euclides:

$$\begin{aligned}54 &= 194 - 2 \times 70,\\ 16 &= 70 - 1 \times 54,\\ 6 &= 54 - 3 \times 16,\\ 4 &= 16 - 2 \times 6,\\ 2 &= 6 - 1 \times 4.\end{aligned}$$

Y eliminamos todos los restos menos el último, el $\mathrm{mcd}(194, 70) = 2$.

$$\left.\begin{aligned}2 &= 6 - 1 \times 4\\ 4 &= 16 - 2 \times 6\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad 2 = 3 \times 6 - 16$$

$$\left.\begin{aligned}2 &= 3 \times 6 - 16\\ 6 &= 54 - 3 \times 16\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad 2 = 3 \times 54 - 10 \times 16$$

$$\left.\begin{aligned}2 &= 6 - 1 \times 4\\ 16 &= 70 - 1 \times 54\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad 2 = 13 \times 54 - 10 \times 70$$

$$\left.\begin{aligned}2 &= 6 - 1 \times 4.\\ 54 &= 194 - 2 \times 70,\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad 2 = 3 \times 194 - 36 \times 70.$$

Por tanto, $(p, q) = (3, -36)$ es una solución de la ecuación $194x + 70y = 2$. Y multiplicando por $\frac{500}{\mathrm{mcd}(194,70)} = 250$, encontramos una *solución particular*

$$(x_0, y_0) = (3250, -9000)$$

de la ecuación $194x + 70y = 500$.

La solución general se encuentra añadiendo a la solución particular (x_0, y_0) un múltiplo entero del *vector de soluciones*

$$\frac{1}{\operatorname{mcd}(194, 70)}(70, -194) = (35, -97);$$

es decir, la solución general está dada por

$$\begin{cases} x &= \quad 3250 + 35t, \\ y &= -9000 - 97t, \end{cases}$$

con $t \in \mathbb{Z}$.

b) Las condiciones para la existencia de soluciones no negativas es que $3250 + 35t \geq 0$ y que $-9000 - 97t \geq 0$. Teniendo en cuenta que t solo puede tomar valores enteros, la primera condición es equivalente a que

$$3250 \geq -35t \Leftrightarrow -\frac{3250}{35} \approx -92,8 \leq t \Leftrightarrow -92 \leq t.$$

Y la segunda condición es equivalente a

$$-9000 \geq 97t \Leftrightarrow -\frac{9000}{97} \approx -92,7 \geq t \Leftrightarrow -93 \geq t.$$

Como un entero no puede cumplir ambas condiciones simultaneamente, no hay soluciones enteras no negativas.

Alternativamente se puede razonar del siguiente modo. Como $500/194 \approx 2{,}5$, la variable x solo puede tomar los valores $0, 1, 2$ en una solución no negativa. Pero como ninguna de las ecuaciones

$$70y = 500,$$

$$194 + 70y = 500,$$

$$388 + 70y = 500,$$

tiene solución entera, la ecuación diofántica $194x + 70y = 500$ no tiene soluciones enteras no negativas.